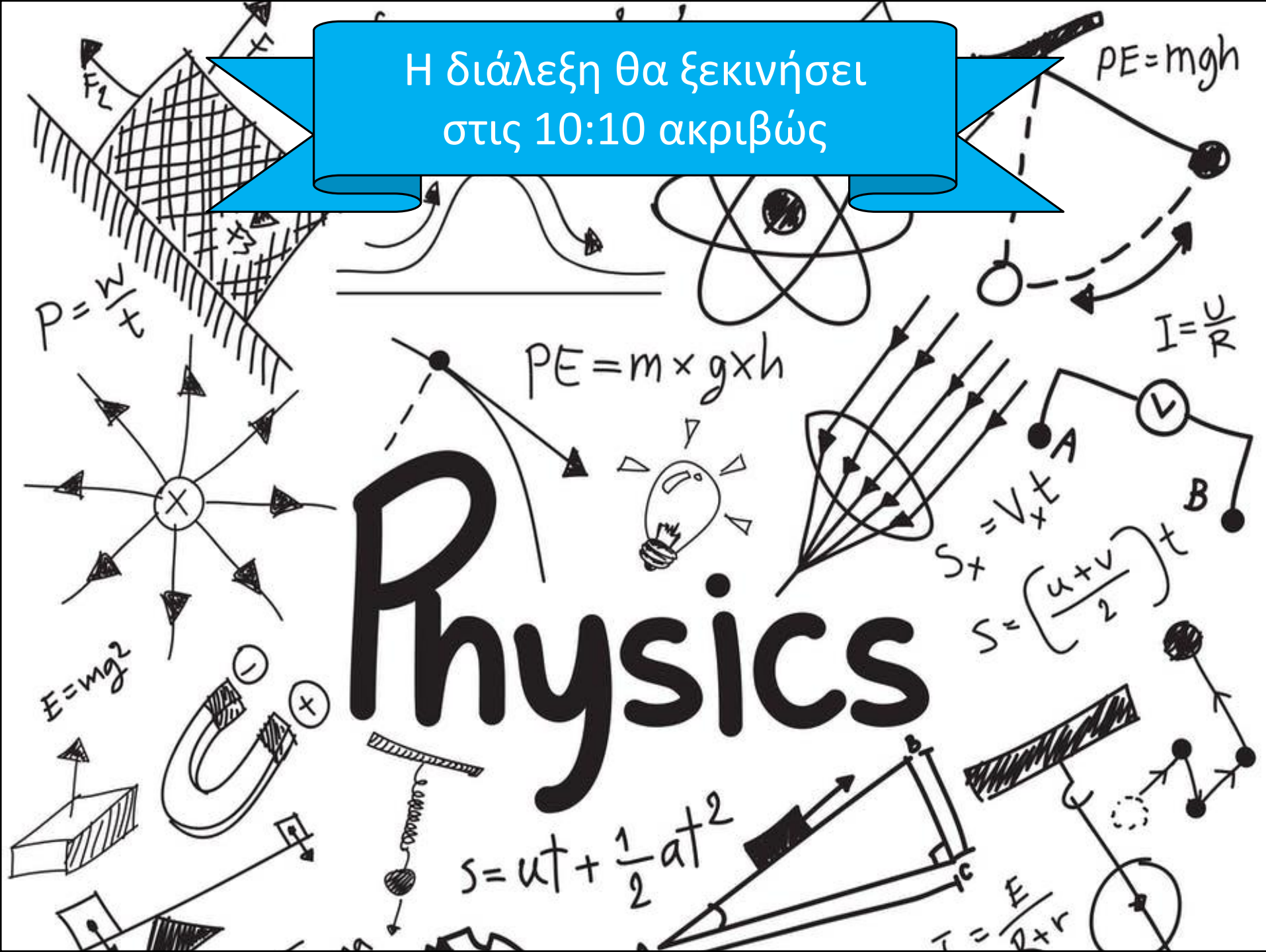


Η διάλεξη θα ξεκινήσει
στις 10:10 ακριβώς

Physics





Εικόνα: Στους αγώνες drag, ο οδηγός θέλει να επιτύχει όσο γίνεται μεγαλύτερη επιτάχυνση. Σε απόσταση περίπου μισού χιλιομέτρου, το όχημα αναπτύσσει ταχύτητες κοντά στα 515 km/h, καλύπτοντας την απαιτούμενη απόσταση σε λιγότερο από 5 sec.
(George Lepp/Stone/Getty Images)

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Μια Διάσταση



Εικόνα: Στους αγώνες drag, ο οδηγός θέλει να επιτύχει όσο γίνεται μεγαλύτερη επιτάχυνση. Σε απόσταση περίπου μισού χιλιομέτρου, το όχημα αναπτύσσει ταχύτητες κοντά στα 515 km/h, καλύπτοντας την απαιτούμενη απόσταση σε λιγότερο από 5 sec.
(George Lepp/Stone/Getty Images)

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

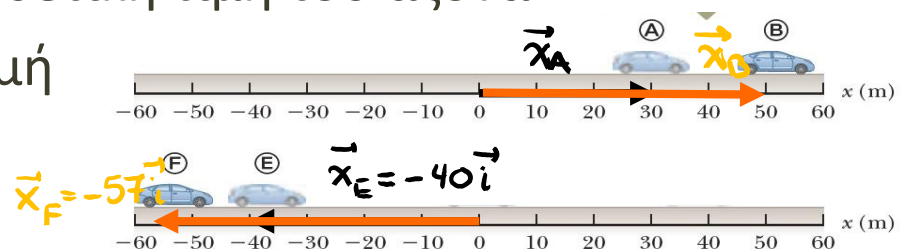
Κίνηση σε Μια Διάσταση

Κίνηση σε μια Διάσταση (review...)

- Κίνηση σε έναν οριζόντιο/κατακόρυφο άξονα
 - Σώμα == σωματίδιο
 - Θεωρούμε απειροστά μικρό το μέγεθός του
 - Θα γνωρίσουμε τους βασικούς ορισμούς της κινητικής...
 - ...αρχικά σε μια διάσταση και μετά σε δυο διαστάσεις
 - Αυτοί είναι:
 - Η Θέση
 - Η Ταχύτητα
 - Η Επιτάχυνση
- ενός σώματος

Κίνηση σε μια Διάσταση (review...)

- Θέση $\vec{x}$: διάνυσμα που ορίζει την τοποθεσία του σώματος σε σχέση με ένα σημείο αναφοράς (όπως το 0)
- Διανυσματικό μέγεθος
 - Θα θεωρήσουμε έναν βαθμονομημένο άξονα στον οποίο γίνεται η κίνηση – το μοναδιαίο του διάνυσμα είναι το $\vec{i}$ (οριζόντια κίνηση)
 - Το **πρόσημο** μας δηλώνει τη φορά του διανύσματος
- Η θέση μπορεί να είναι θετική ή αρνητική - ως τιμή στο βαθμονομημένο άξονα
 - Θετική τιμή : το διάνυσμα ξεκινά από ένα σημείο αναφοράς και καταλήγει σε κάποια θετική τιμή του άξονα
 - Αντίθετα για αρνητική τιμή
- Παράδειγμα:



Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Μετατόπιση $\Delta\vec{x}$:** η αλλαγή στη θέση ενός σωματιδίου

Ορισμός:

$$\Delta\vec{x} \equiv \vec{x}_{τελ} - \vec{x}_{αρχ}$$

- με $\vec{x}_{τελ}, \vec{x}_{αρχ}$ την τελική και την αρχική θέση του σωματιδίου
- Θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό: $\vec{x}_{τελ} \rightarrow \vec{x}_f, \vec{x}_{αρχ} \rightarrow \vec{x}_i$
- Προσοχή: **απόσταση $d \neq$ μετατόπιση $\Delta\vec{x}$!**
- Παράδειγμα:

Η απόσταση που διανύει ένας αθλητής μπάσκετ, αν απλουστευμένα υποθέσουμε ότι κινείται σε ευθεία γραμμή, είναι μερικά χιλιόμετρα, αλλά η μετατόπιση από την αρχική θέση του (κέντρο γηπέδου) ως την τελική (ξανά στην ίδια περίπου θέση) είναι πολύ μικρότερη (ως μέτρο)!



Κίνηση σε μια Διάσταση

- Μετατόπιση $\Delta \vec{x}$: διανυσματικό μέγεθος!

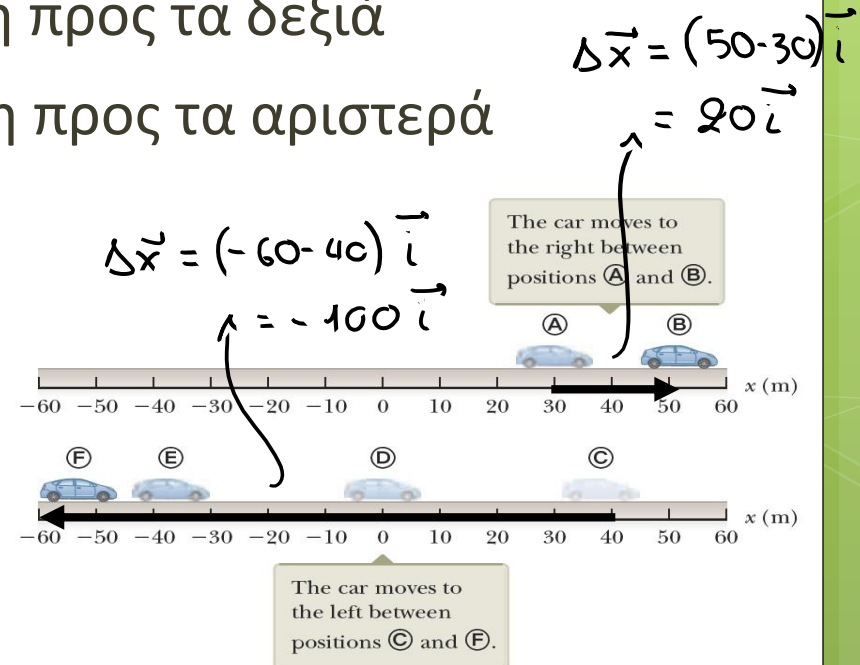
- Έχει μέτρο, διεύθυνση, φορά

- Αν $\Delta \vec{x} = \vec{x}_f - \vec{x}_i = \overbrace{(x_f - x_i)}^{\Delta x} \vec{i} = \underbrace{\Delta x}_{\in \mathbb{R}} \vec{i}$:

- $\Delta x = x_f - x_i > 0 \iff$ κίνηση προς τα δεξιά

- $\Delta x = x_f - x_i < 0 \iff$ κίνηση προς τα αριστερά

- Παράδειγμα:



Κίνηση σε μια Διάσταση

- Μέση ταχύτητα:

$$\vec{u}_{avg} \equiv \frac{\vec{x}_f - \vec{x}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \underbrace{\frac{1}{\Delta t}}_{\in \mathbb{R}^+} \Delta \vec{x}$$

- Διάνυσμα: έχει επίσης μέτρο, διεύθυνση και φορά!
- Απαιτούνται δυο σημεία (αρχικό & τελικό)
- Ίδιο πρόσημο με $\Delta \vec{x}$ – γιατί?

Μονάδα μέτρησης:
m/s (μέτρο ανά
δευτερόλεπτο)

- Μέση αριθμητική ταχύτητα:

- $s_{avg} \equiv \frac{d}{\Delta t}$, όπου d η απόσταση
- Βαθμωτό μέγεθος – όχι διάνυσμα !

- Προσοχή στη διαφορά τους!

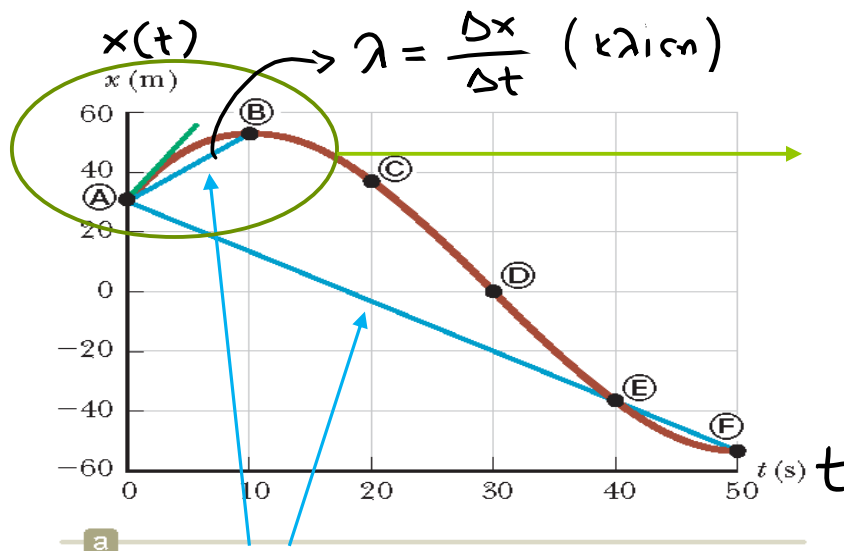
Κίνηση σε μια Διάσταση

Στιγμιαία Ταχύτητα

- Διάνυσμα: έχει μέτρο, διεύθυνση και φορά
- Η μέση ταχύτητα όταν μετριέται σε $\Delta t \rightarrow 0$

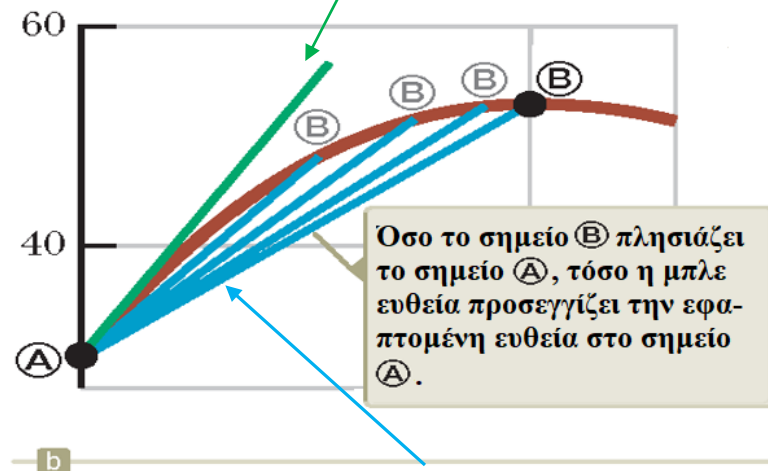
$$\vec{u}_x \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}}_{\vec{u}_{avg}} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \vec{x}'(t)$$

Παράδειγμα:



Κλίση ευθείας AF (ή AB) = μέση ταχύτητα

Κλίση εφαπτομένης σε σημείο = στιγμιαία ταχύτητα



Κλίση ευθείας μεταξύ δυο σημείων = μέση ταχύτητα

Κίνηση σε μια Διάσταση

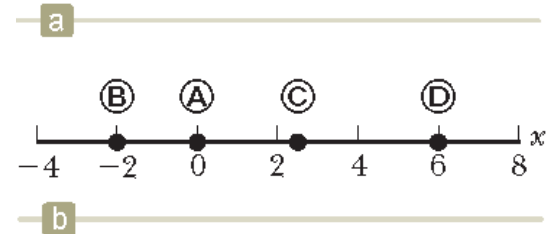
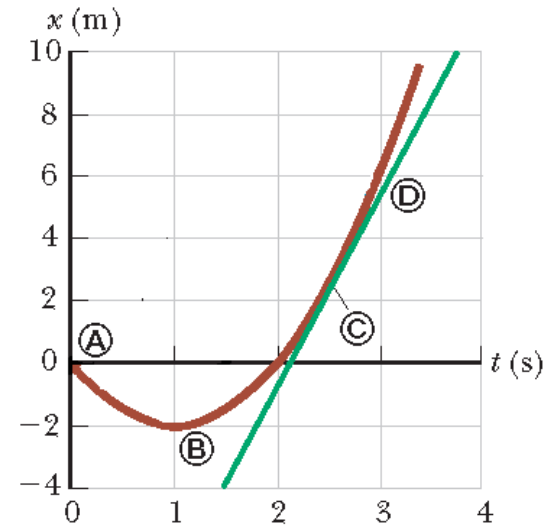
● Παράδειγμα:

- Σωματίδιο κινείται στον οριζόντιο άξονα, με τη θέση του να ορίζεται από τη σχέση

$$x = -4t + 2t^2 = x(t)$$

όπου x είναι η θέση σε m , και t είναι ο χρόνος σε s , όπως στο Σχήμα (α).

- Α. Βρείτε τη μετατόπιση του σωματιδίου στα χρονικά διαστήματα $t = 0$ ως $t = 1$ και από $t = 1$ έως $t = 3$ s.
- Β. Υπολογίστε τη μέση ταχύτητα σε αυτά τα δυο διαστήματα.
- Γ. Βρείτε τη στιγμιαία ταχύτητα του σωματιδίου τη χρονική στιγμή $t = 2.5$ s.



Κίνηση σε μια Διάσταση

Λύση:

$$x = -4t + 2t^2 = x(t)$$

- A. Βρείτε τη μετατόπιση του σωματιδίου στα χρονικά διαστήματα $t = 0$ ως $t = 1$ και από $t = 1$ έως $t = 3$ s.

$$\bullet t = 0 \rightarrow t = 1 : \Delta x = x_f - x_i = x(1) - x(0)$$

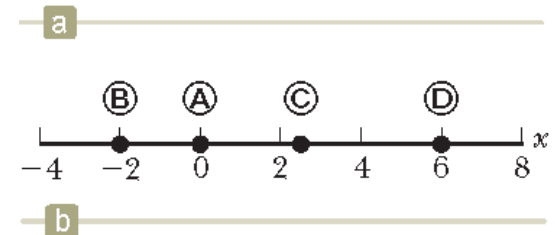
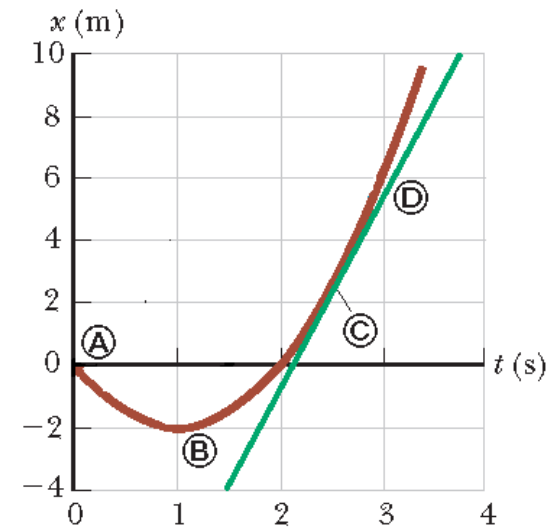
$$= -2 - 0 = -2 \text{ m}$$

$$\Delta \vec{x} = -2\vec{i} \text{ m}$$

$$\bullet t = 1 \rightarrow t = 3 : \Delta x = x_f - x_i = x(3) - x(1)$$

$$= 6 - (-2) = 8 \text{ m}$$

$$\Delta \vec{x} = 8\vec{i} \text{ m}$$



Κίνηση σε μια Διάσταση

Λύση:

$$x = -4t + 2t^2$$

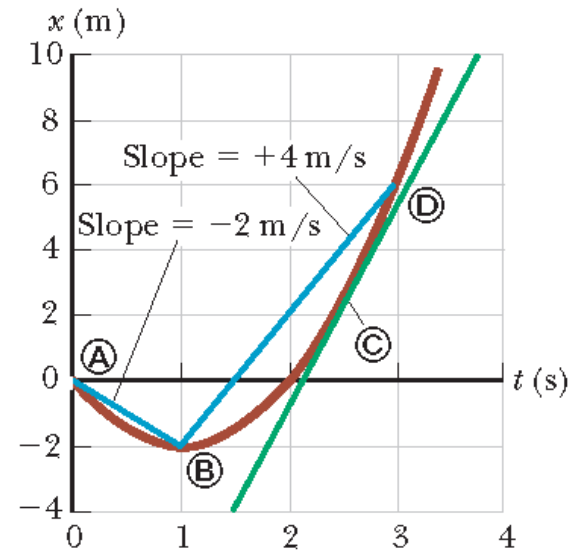
- Β. Υπολογίστε τη μέση ταχύτητα σε αυτά τα δυο διαστήματα.

$$u_{avg} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad ; \quad t = 0 \rightarrow t = 1 \quad ; \quad u_{avg} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$$
$$= \frac{\Delta x^{A \rightarrow B}}{1 - 0} = \frac{-2}{1} = -2 \frac{m}{s}$$

$$\vec{u}_{avg} = -2 \hat{i} \frac{m}{s}$$

$$t = 1 \rightarrow t = 3 \quad ; \quad u_{avg} = \frac{\Delta x^{B \rightarrow D}}{\Delta t}$$
$$= \frac{8}{3-1} = \frac{8}{2} = 4 \frac{m}{s}$$

$$\vec{u}_{avg} = 4 \hat{i} \frac{m}{s}$$



a



b

Κίνηση σε μια Διάσταση

Λύση:

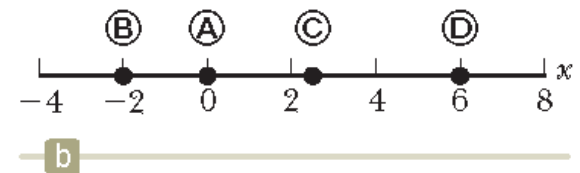
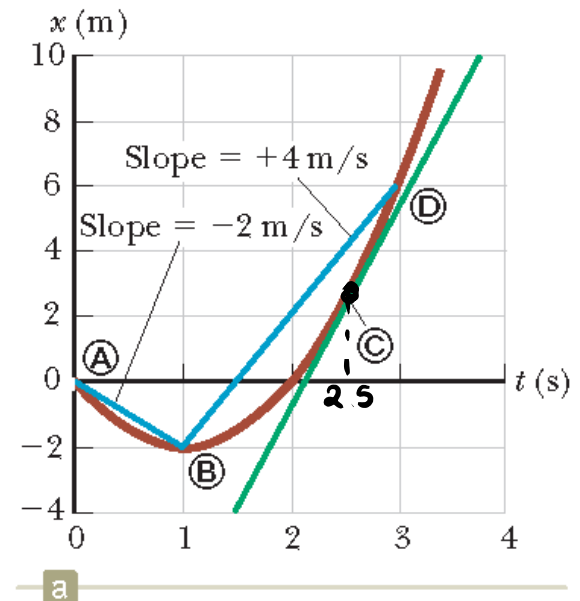
$$x = -4t + 2t^2$$

- C. Βρείτε τη στιγμιαία ταχύτητα του σωματιδίου τη χρονική στιγμή $t = 2.5$ s.

$$\begin{aligned}\text{Είναι } v_x &= \frac{d}{dt} x(t) = \frac{d}{dt} (-4t + 2t^2) \\ &= (-4t + 2t^2)' = -4 + 4t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Για } t = 2.5 \text{ s}, \quad v_x(2.5) &= -4 + 4 \cdot 2.5 \\ &= 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}\end{aligned}$$

$$\text{Δηλ. } \vec{u}_x(2.5) = 6 \vec{1} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Κίνηση σε μια Διάσταση

- Θέση σωματιδίου υπό σταθερή ταχύτητα

$$u_{avg} = u_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta x = u_x \Delta t \Leftrightarrow (x_f - x_i) = u_x \Delta t$$

- Άρα

$$x_f = x_i + u_x \Delta t$$

- Αν θεωρήσουμε ότι $t_i = 0$:

$$\Delta t = t_f - \cancel{t_i} = t_f = t$$

και τότε

$$x_f = x_i + u_x t \rightsquigarrow x_f(t)$$

- Επίσης, το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό και ίσο με

$$u = \frac{d}{\Delta t}$$

όπου d το μήκος της απόστασης που διανύθηκε

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Επιτάχυνση**

- Η μεταβολή της ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου

- **Μέση επιτάχυνση**

$$\vec{a}_{x,avg} \equiv \frac{\Delta \vec{u}_x}{\Delta t} = \frac{\vec{u}_{xf} - \vec{u}_{xi}}{t_f - t_i}$$

- **Στιγμιαία επιτάχυνση**

$$\vec{a}_x \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{u}_x}{\Delta t} = \frac{d\vec{u}_x}{dt} = \frac{d}{dt} \vec{v}_x(t)$$

- Αφού όμως

$$\frac{d}{dt} \vec{u}_x = \frac{d}{dt} \frac{d\vec{x}}{dt}$$

είναι

$$\vec{a}_x = \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \vec{x}(t) = (\vec{x}(t))''$$

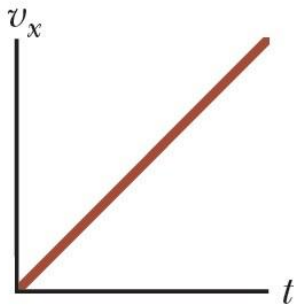
Μονάδα μέτρησης:
 m/s^2 (μέτρο ανά
δευτερόλεπτο στο
τετράγωνο)

Κίνηση σε μια Διάσταση

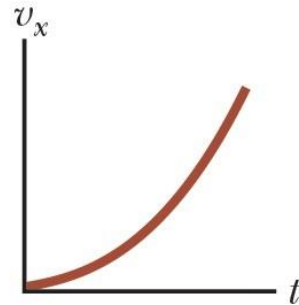
Quiz 1:

- Βρείτε τα ζεύγη ταχύτητας-επιτάχυνσης

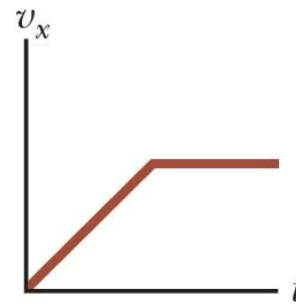
Hint: Η ταχύτητα και η επιτάχυνση έχουν σχέση παραγώγου-παράγουσας



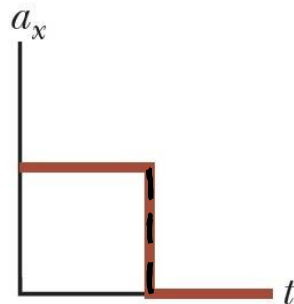
a



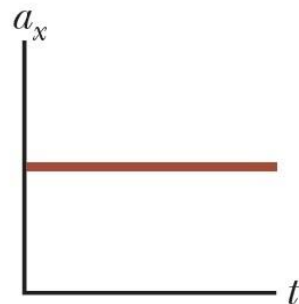
b



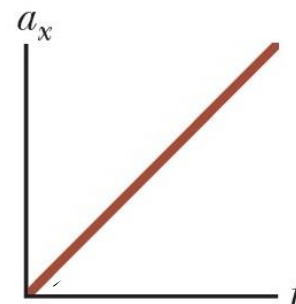
c



d



e



f

a → e
b → f
c → d

Κίνηση σε μια Διάσταση

Quiz 2:

- Η θέση ενός σωματιδίου δίνεται από τη σχέση

$$x = 4 - 27t + t^3 = x(t)$$

- A) Βρείτε τη συνάρτηση ταχύτητας ως προς το χρόνο
- B) Βρείτε τη συνάρτηση επιτάχυνσης ως προς το χρόνο
- Γ) Υπάρχει κάποια χρονική στιγμή που το σωματίδιο είχε $u = 0$?

A) Είναι $u_x(t) = \frac{d}{dt} x(t) = (4 - 27t + t^3)' = -27 + 3t^2$

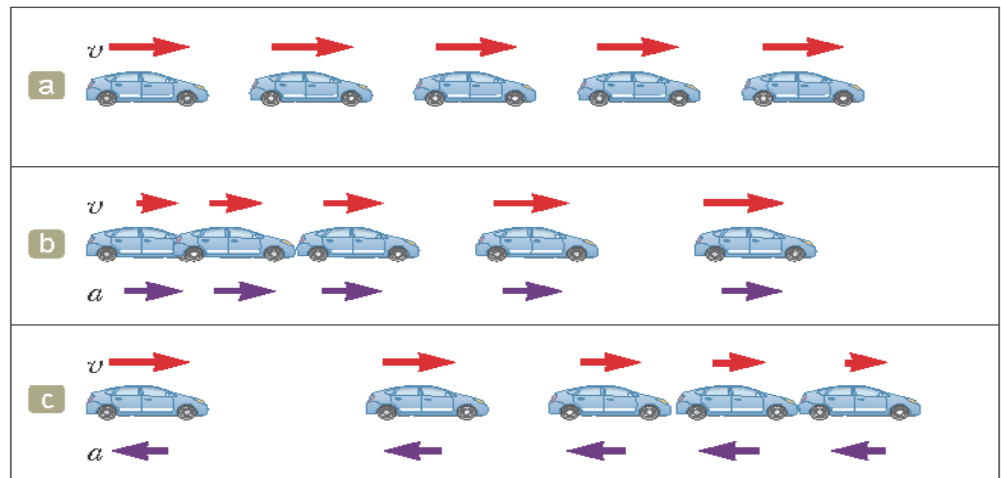
B) — " — $a_x(t) = \frac{d}{dt} u_x(t) = (-27 + 3t^2)' = 6t$

Γ) Είναι $u_x(t) = 0 \Leftrightarrow -27 + 3t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 9 = 0$

Άρα $\underline{t_1 = 3 \text{ s}}$ ή $t_2 = -3 \text{ s}$

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Επιτάχυνση
 - όταν η ταχύτητα αλλάζει με το χρόνο
 - σταθερή ταχύτητα $\longrightarrow$ μηδενική επιτάχυνση
- Ταχύτητα και επιτάχυνση: **διανύσματα**
 - Θετική και αρνητική ταχύτητα
 - Θετική και αρνητική επιτάχυνση
 - Τα πρόσημα υποδηλώνουν φορά!
- Παράδειγμα



Κίνηση σε μια Διάσταση

- Ειδική περίπτωση: a_x σταθερή
 - Ορίζουμε θετική φορά κίνησης προς τα δεξιά
- Εξισώσεις Μονοδιάστατης Κίνησης υπό σταθερή επιτάχυνση:

1. $u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$

2. $u_{x,avg} = \frac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$

3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}(u_{x_i} + u_{x_f})t$ ή $x_f = x_i + u_{x,avg}t$

4. $x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}a_x t^2$

5. $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$

Οι δείκτες i και f δηλώνουν αρχική και τελική κατάσταση, ενώ ο δείκτης x δηλώνει μονοδιάστατη κίνηση σε έναν οριζόντιο άξονα x'

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Απόδειξη:

Αφού η επιτάχυνση είναι σταθερή, τότε

$$a_{x,avg} = a_x$$

Από τον ορισμό έχουμε

$$a_x = \frac{\Delta u_x}{\Delta t} = \frac{u_{x_f} - u_{x_i}}{t_f - t_i} \xrightarrow{t_i=0, t_f=t} u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$$

Άρα

$$u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$$

$$u_{x_f}(t)$$

||

$$u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Απόδειξη:

Αφού η επιτάχυνση είναι σταθερή, τότε η ταχύτητα (δηλ. το ολοκλήρωμά της) θα είναι γραμμική συνάρτηση του χρόνου

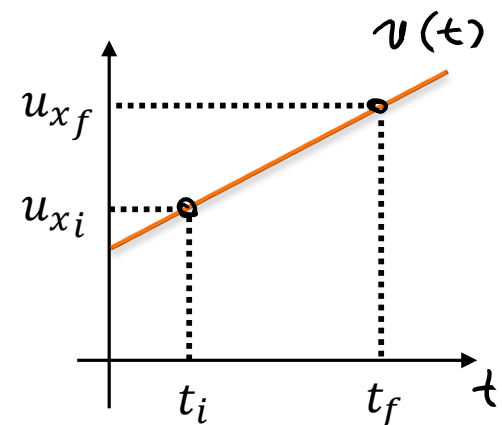
Έτσι η μέση ταχύτητα μπορεί να εκφραστεί ως ο αριθμητικός μέσος της αρχικής ταχύτητας u_{xi} και της τελικής ταχύτητας

u_{xf}

Δηλ.

$$u_{x\,avg} = \frac{u_{xf} + u_{xi}}{2}$$

$$u_{x,avg} = \frac{u_{xi} + u_{xf}}{2}$$



Κίνηση σε μια Διάσταση

● Απόδειξη:

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}(u_{x_i} + u_{x_f})t \quad \text{ή} \quad x_f = x_i + u_{x,avg}t$$

Από την προηγούμενη σχέση, πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη με t :

$$u_{x_{avg}}t = \frac{u_{x_f} + u_{x_i}}{2}t$$

Όμως

$$u_{x_{avg}}t = \Delta x = x_f - x_i$$

οπότε

$$(x_f - x_i) = \frac{u_{x_f} + u_{x_i}}{2}t$$

Λύνοντας ως προς x_f :

$$x_f = x_i + \frac{u_{x_f} + u_{x_i}}{2}t$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Απόδειξη:
Έχουμε ήδη

$$x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$$

και

$$x_f = x_i + \frac{u_{x_f} + u_{x_i}}{2} t$$

Αντικαθιστώντας

$$\begin{aligned} x_f &= x_i + \frac{1}{2}(u_{x_i} + a_x t + u_{x_i})t \\ &= x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \end{aligned}$$

Άρα

$$x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

● Απόδειξη:

Έχουμε

$$u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$$

$$u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t \Rightarrow t = \frac{u_{x_f} - u_{x_i}}{a_x}$$

και

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}(u_{x_f} + u_{x_i})t$$

Αντικαθιστώντας

$$\begin{aligned} x_f &= x_i + \frac{1}{2}(u_{x_f} + u_{x_i})\left(\frac{u_{x_f} - u_{x_i}}{a_x}\right) \\ &= x_i + \frac{u_{x_f}^2 - u_{x_i}^2}{2a_x} \end{aligned}$$

και

$$u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Δεν είναι απαραίτητη η χρήση διανυσμάτων στην κίνηση αυτή
 - Είδατε ότι το τυπολόγιο της κίνησης ήταν χωρίς διανύσματα
 - Προσοχή στην ερμηνεία των αρνητικών μεγεθών!
- Υπενθυμίζεται η σύμβαση ότι : ορίζουμε ως θετική φορά αυτή προς τα δεξιά
 - Αντίστοιχα, αρνητική προς τα αριστερά
 - Μην ξεχνάτε να ορίζετε το σημείο αναφοράς σας ($t_i = 0$)!
- **Ελεύθερη πτώση** (κίνηση σε μια διάσταση – κατακόρυφη)
 - Επιτάχυνση βαρύτητας $\vec{g} = -9.8\vec{j} \text{ m/s}^2$ (φορά προς τα κάτω)
 - Ίδια μεθοδολογία και εξισώσεις ($x \rightarrow y$)
 - Συνήθως ορίζουμε θετική φορά κίνησης προς τα επάνω

Κίνηση σε μια Διάσταση

ΟΧΙ $10 \frac{m}{s^2}$!

- Ελεύθερη πτώση: $\vec{a}_y = \vec{g} = -9.8 \vec{j} \text{ m/s}^2$ σταθερή
- Ορίζουμε θετική φορά προς τα επάνω

• Εξισώσεις Ελεύθερης Πτώσης:

1. $u_{yf} = u_{yi} - gt$

2. $u_{y,avg} = \frac{u_{yi} + u_{yf}}{2}$

3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}(u_{yi} + u_{yf})t$ ή $y_f = y_i + u_{y,avg}t$

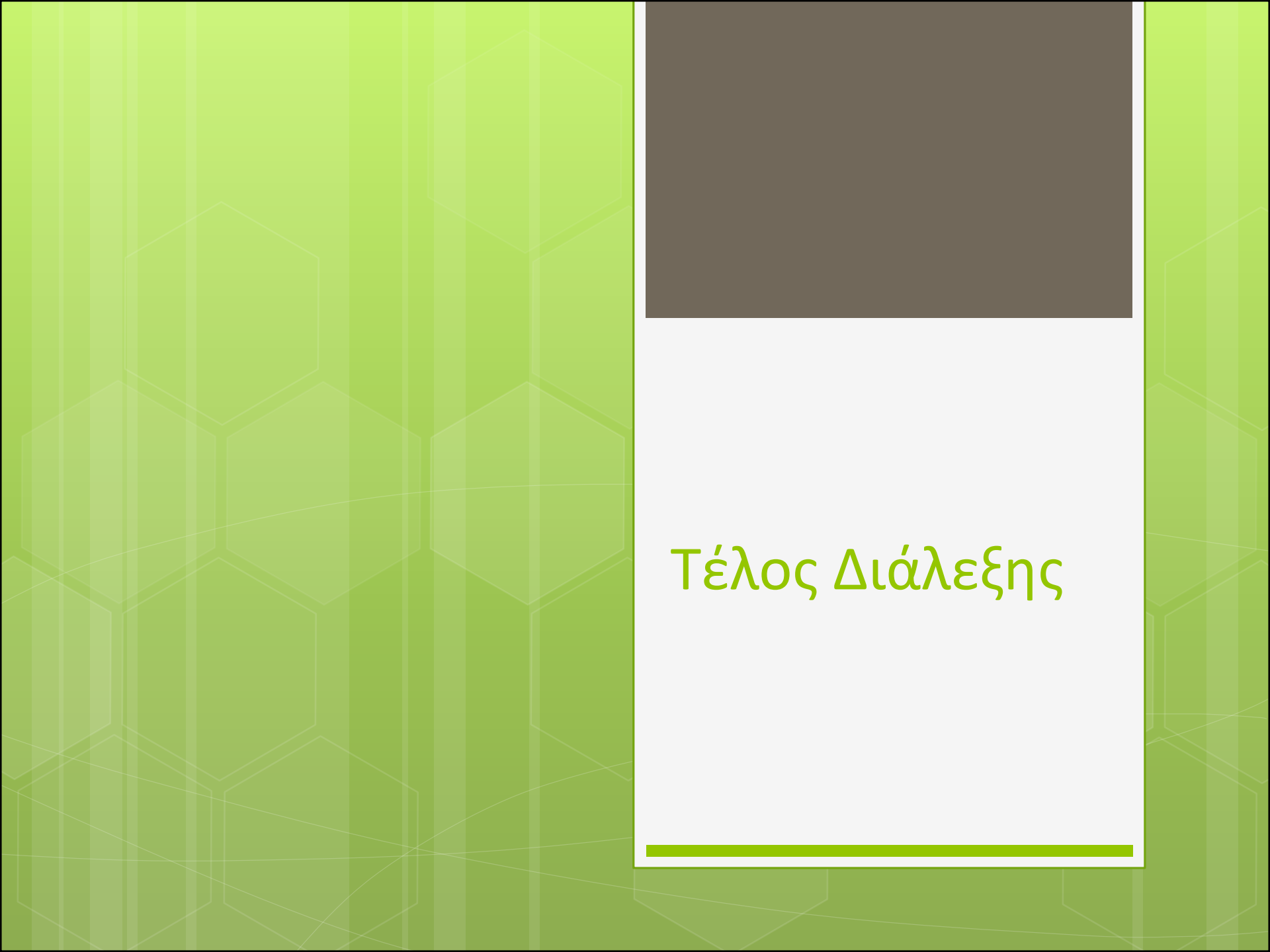
4. $y_f = y_i + u_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2$

5. $u_{yf}^2 = u_{yi}^2 - 2g(y_f - y_i)$

Οι δείκτες i και f δηλώνουν αρχική και τελική κατάσταση, ενώ ο δείκτης y δηλώνει μονοδιάστατη κίνηση σε έναν κατακόρυφο άξονα $y'y$

Σε αυτές τις εξισώσεις, οι επιτάχυνση της βαρύτητας χρησιμοποιείται κατά μέτρο, $g = 9.8 \text{ m/s}$

Αν ορίσετε θετική φορά κίνησης προς τα κάτω (δηλ. με ίδια φορά με το διάνυσμα της επιτάχυνσης της βαρύτητας), τότε όπου $-g$ θέτουμε g



Τέλος Διάλεξης

